O contexto da **abertura** possibilita um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, associado aos **TCTs Ciência e Tecnologia e Educação Ambiental**. É possível tratar dos números complexos e sua aplicação em Engenharia elétrica como em circuitos de corrente alternada para calcular impedâncias, em transformadores e motores elétricos para modelar e analisar o comportamento eletromagnético, incluindo perdas e eficiência.

CAPÍTULO 9

Conjunto dos números complexos

A energia elétrica que é produzida em hidrelétricas, ou usinas eólicas, por exemplo, é enviada por linhas de transmissão até subestações de transmissão, depois passa por subestações de distribuição, fiação dos postes e, por fim, chega a residências, estabelecimentos comerciais etc.

Além disso, no Brasil a energia elétrica é transmitida por esse caminho através de correntes alternadas, e empresas de distribuição de energia garantem a qualidade do serviço monitorando essas correntes, com o auxílio de números complexos.

Aproveite o **Mapa interativo: Usinas elétricas no Brasil** para realizar uma conversa acerca de energias limpas e de fontes renováveis, possíveis impactos ambientais como perda da biodiversidade, mudanças nos ecossistemas aquáticos e terrestres, alterações no microclima da região que afetem a fauna ou a flora etc.

AJHVEPHOTO/SHUTTERSTOCK

Usina hidrelétrica de Itaipu, em Foz do Iguaçu, no estado do Paraná. Foto de 2022.

Além da teoria

Além da teoria: 1. Resposta pessoal.

1. Que empresa faz a distribuição de energia elétrica em sua cidade? Ela distribui energia elétrica produzida em que usina?
2. Pesquise quais são as principais fontes de energia renovável e verifique se há projetos viáveis de aplicação desse tipo de energia em sua cidade ou região. Depois, converse com os colegas acerca da importância de fontes de energia limpa.

2. Resposta pessoal.

OBJETO DIGITAL Mapa clicável: Usinas elétricas no Brasil

1. Número complexo

A descoberta do número como abstração de quantidades observadas no cotidiano foi o primeiro e, talvez, o mais importante feito matemático da humanidade. Houve uma longa e árdua caminhada desde os números naturais até os números reais. Mas seriam os números reais o último estágio na escalada do conceito de número?

Neste capítulo ampliaremos o conceito de número para além dos reais, definindo os **números complexos**.

A insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em $\mathbb{R}$, raízes quadradas, quartas, sextas, ... de números negativos. Para que a radiciação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número **i**, não real, chamado de **unidade imaginária**, e que satisfaz a seguinte condição:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1$$

A partir da unidade imaginária, define-se:

Número complexo é todo número da forma $a + b\text{i}$, em que a e b são números reais, e i é a unidade imaginária.

Exemplos

- **a.** $5 - 2\text{i}$
- **b.** $7 + \sqrt{2}\text{i}$
- **c.** 3i
- **d.** 0i (que é igual a zero)

O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$, isto é:

$$\mathbb{C} = \{a + b\text{i}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais}\}$$

Com os números complexos é possível definir raiz de índice par e radicando negativo, pois potências de números complexos com expoente par podem ser negativas. Por exemplo:

$$(3\text{i})^2 = 3^2 \cdot \text{i}^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

Assim, 3i é uma raiz quadrada de −9.

Sugerimos a leitura do livro de Alex Bellos, **Alex através do espelho: como a vida reflete os números e como os números refletem a vida**. Nesse livro, por meio de uma história fictícia envolvendo o personagem principal Bellos, o autor explora diferentes conceitos matemáticos, como os números complexos.

Forma algébrica de um número complexo

A expressão $a + b\text{i}$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é chamada de **forma algébrica** do número complexo, em que a é a **parte real** e b é a **parte imaginária**.

Exemplos

- **a.** No número complexo $5 + 4\text{i}$, a parte real é 5 e a parte imaginária é 4.

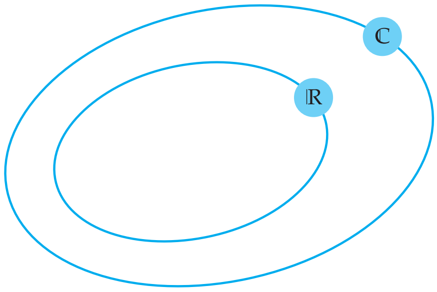
  Todo número complexo cuja parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário**.

- **b.** No número complexo 7i, que pode ser representado por $0 + 7\text{i}$, a parte real é 0 (zero) e a parte imaginária é 7.

  Todo número complexo cuja parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário puro**.

- **c.** No número complexo 9, que pode ser representado por $9 + 0\text{i}$, a parte real é 9 e a parte imaginária é zero.

Todo número complexo com parte imaginária zero é um **número real**. Note, portanto, que todo número real a é, também, um número complexo, pois pode ser representado por $a + 0i$. Assim, temos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, como representado no diagrama.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine x, com $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $8 + (3x - 6)i$ seja real.

Resolução

O número $8 + (3x - 6)i$ é real se, e somente se, a parte imaginária é zero, isto é:

$$3x - 6 = 0$$

Assim, concluímos que $x = 2$.

2. Obtenha k, com $k \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $k^2 - 4 + (k - 2)i$ seja:

a. imaginário.

b. imaginário puro.

Resolução

a. O número $k^2 - 4 + (k - 2)i$ é imaginário se, e somente se, a parte imaginária é diferente de zero, isto é:

$$k - 2 \neq 0$$

Assim, concluímos que $k \neq 2$.

b. O número $k^2 - 4 + (k - 2)i$ é imaginário puro se, e somente se, a parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero, isto é:

$$\begin{cases} k^2 - 4 = 0 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 2 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

Assim, concluímos que $k = -2$.

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, são **iguais** se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais.

Ou seja:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Determine os números reais x e y tais que $2x + y + 5i = 6 + (x + y)i$.

Resolução

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais, ou seja:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos: $x + 6 - 2x = 5 \Rightarrow x = 1$

Substituindo x por 1 na equação (1), obtemos: $y = 6 - 2 \cdot 1 \Rightarrow y = 4$

Números complexos conjugados

O número complexo $a + bi$ é o **conjugado** do número complexo $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, se, e somente se, suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias forem opostas.

Ou seja:

$$a + bi \text{ é conjugado de } c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -d \end{cases}$$

Indicando por z um número complexo, o conjugado de z será indicado por $\bar{z}$.

Exemplos

a. O conjugado de $z = 8 + 4i$ é $\bar{z} = 8 - 4i$.

b. O conjugado de $z = 5 - 9i$ é $\bar{z} = 5 + 9i$.

c. O conjugado de $z = 10i$ é $\bar{z} = -10i$.

d. O conjugado de $z = 3$ é $\bar{z} = 3$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

a. Todo número real é também número complexo. **1. a.** verdadeira

b. Todo número complexo é também número real. **1. b.** falsa

c. $\mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \varnothing$ **1. c.** falsa

d. $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0\}$ **1. d.** verdadeira

e. O conjugado do número $3 + 4i$ é $-3 - 4i$. **1. e.** falsa

f. O conjugado do número $3 + 4i$ é $3 - 4i$. **1. f.** verdadeira

g. Se $a + 3i = 6 + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então $a + b = 9$. **1. g.** verdadeira

2. Determine os valores reais de x para que o número complexo $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ seja:

a. real; **2. a.** $x = 3$

b. imaginário; **2. b.** $x \neq 3$

c. imaginário puro. **2. c.** $x = -3$

3. Dada a igualdade $2a + (a + 2)i = (b - a) + bi$, determine os números reais a e b. **3.** $a = 1$ e $b = 3$

4. Determine os números reais x e y tais que $x^2 - 1 - 3y^2i = y - 27i$. **4.** $x = 2$ e $y = 3$ ou $x = -2$ e $y = 3$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

2. Operações elementares com números complexos

Antes de apresentar as operações elementares com números complexos, é importante ressaltar que elas foram definidas como extensões das operações em $\mathbb{R}$, de modo que fossem conservadas as propriedades dessas operações em $\mathbb{R}$.

Para a adição foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto, de modo que:

- o elemento neutro da adição é o número zero, ou seja, $0 + 0i$;
- o oposto de um número complexo qualquer $z = a + bi$, com a e b reais, é o número complexo $-z = -a - bi$.

Para a multiplicação foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso, de modo que:

- o elemento neutro da multiplicação é o número 1, ou seja, $1 + 0i$;
- o inverso de um número complexo não nulo $z = a + bi$ é o número complexo indicado por z^{-1}, tal que $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$

Foi conservada também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Esses princípios resultaram nas seguintes definições:

Para quaisquer números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que a, b, c e d são números reais, temos:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $z_1 : z_2 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$ (com $z_2 \neq 0$)

Nota:

Observe como as propriedades distributiva, associativa e comutativa, que se estendem para a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$, permitem a definição de multiplicação de números complexos como foi apresentada anteriormente:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1)$$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para agilizar as operações elementares com números complexos, aplicamos as propriedades operatórias — associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto, elemento inverso e distributiva — em vez das definições, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplos

Sendo $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4 - 5i$, vamos efetuar:

a. $z_1 + z_2 = 3 + 2i + 4 - 5i = (3 + 4) + (2 - 5)i = 7 - 3i$

b. $z_1 - z_2 = 3 + 2i - (4 - 5i) = 3 + 2i - 4 + 5i = -1 + 7i$

c. $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (4 - 5i) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5i) + 2i \cdot 4 + 2i \cdot (-5i) =$

$= 12 - 15i + 8i - 10i^2 = 12 - 15i + 8i + 10 = 22 - 7i$

d. $z_1 : z_2 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = (3 + 2i) \cdot \dfrac{1}{4 - 5i} = \dfrac{3 + 2i}{4 - 5i}$

Para representar esse resultado na forma algébrica, $a + bi$, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, isto é:

$$\frac{3 + 2i}{4 - 5i} = \frac{(3 + 2i) \cdot (4 + 5i)}{(4 - 5i) \cdot (4 + 5i)} = \frac{12 + 15i + 8i + 10i^2}{4^2 - (5i)^2} = \frac{2 + 23i}{41}$$

Assim, $z_1 : z_2 = \dfrac{2}{41} + \dfrac{23}{41}i$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Determine o número $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que $zi + 2\overline{z} = 4 - i$.

Resolução

$$(x + yi)i + 2(x - yi) = 4 - i \Rightarrow xi + yi^2 + 2x - 2yi = 4 - i$$

$$\therefore (-y + 2x) + (x - 2y)i = 4 - i$$

Assim: $\begin{cases} -y + 2x = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$

Substituímos (1) em (2): $x - 2(2x - 4) = -1$

$$\therefore x - 4x + 8 = -1 \Rightarrow x = 3$$

Fazendo $x = 3$ em (1), temos: $y = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow y = 2$

Logo: $z = 3 + 2i$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

5. Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = 5 + i$, $z_3 = 6$ e $z_4 = -3i$, calcule:

a. $z_1 + z_2$ **5. a.** $1 + 3i$

b. $z_3 + \overline{z_2} - z_4$ **5. b.** $11 + 2i$

6. Sendo $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 6$, $z_3 = 2i$ e $z_4 = 2 - i$, calcule:

a. $z_1 \cdot z_2$ **6. a.** $30 + 18i$

b. $z_1 \cdot z_3$ **6. b.** $-6 + 10i$

c. $z_1 \cdot z_4$ **6. c.** $13 + i$

d. $z_2 \cdot \overline{z_4}$ **6. d.** $12 + 6i$

7. Considere os números complexos: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 4i$ e $z_4 = 2$. Calcule:

a. $\frac{z_4}{z_1}$ **7. a.** $\frac{4}{13} - \frac{6i}{13}$

b. $\frac{z_3}{z_2}$ **7. b.** $-\frac{4}{5} + \frac{8i}{5}$

c. $(z_2)^{-1}$ **7. c.** $\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$

d. $(z_3)^{-1}$ **7. d.** $-\frac{i}{4}$

8. Resolva cada uma das expressões.

a. $3 + 2i + (1 + 5i)(2 - i)$ **8. a.** $10 + 11i$

b. $\frac{2 + i}{1 - 2i} + 2i(1 - 3i)$ **8. b.** $6 + 3i$

9. Resolva as equações a seguir no universo $\mathbb{C}$.

a. $z + 4\bar{z} = 10 + 18i$ **9. a.** $S = \{2 - 6i\}$

b. $z \cdot \bar{z} + 2z = 16 + 2i$ **9. b.** $S = \{3 + i, -5 + i\}$

Sugestão: Em cada equação, substitua a variável z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

10. Obtenha o valor real de a para que o número complexo $z = (a + 1)(a - 1 + i)$ seja imaginário puro. **10.** $a = 1$

11. Obtenham todos os números reais α de modo que o número $z = \frac{i + \text{sen}\,\alpha}{1 - i}$ seja real. **11.** $\alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 a 5.

Mentes brilhantes

A origem dos números complexos

Na primeira metade do século XVI, os matemáticos italianos Gerônimo Cardano, Niccolò Fontana (pseudônimo Tartaglia), Scipione Dal Ferro, Ludovico Ferrari e outros colaboradores ocasionais protagonizaram um importante episódio da história da Matemática ao resolverem uma equação polinomial do 3º grau. Inicialmente, deduziram a fórmula a seguir para resolver qualquer equação incompleta do tipo $x^3 + px = q$, com $\{p, q\} \subset \mathbb{R}$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Algum tempo depois, apresentaram a resolução de uma equação polinomial do 3º grau completa.

Por exemplo, na equação $x^3 = 6x - 4$, que é equivalente a $x^3 - 6x = -4$, aplicando a fórmula anterior, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$

Nesse momento poderíamos ser levados a concluir que a equação $x^3 - 6x = -4$ não possui raiz real, pois não existe no conjunto $\mathbb{R}$ o número $\sqrt{-4}$. Porém, essa conclusão é equivocada, uma vez que o número real 2 é raiz da equação, como se constata pela substituição de x por 2:

$$2^3 - 6 \cdot 2 = -4$$

Essa constatação, ao resolver uma equação desse tipo, fez com que Gerônimo Cardano passasse a admitir a existência da raiz quadrada de números negativos, fornecendo subsídios à construção de um novo conjunto numérico: o conjunto dos **números complexos**.

Nota: Neste texto, foram utilizadas notações modernas, que ainda não existiam na época de Cardano.

Elaborado com base em: CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos números complexos**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 3 ago. 2024.

3. Potências de números complexos com expoentes inteiros

Sendo w um número complexo qualquer, definimos:

- $w^0 = 1$, com $w \neq 0 + 0i$
- $w^1 = w$
- $w^n = \underbrace{w \cdot w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{n \text{ fatores}}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$
- $w^{-n} = \frac{1}{w^n}$, com $w \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$

Exemplos

a. $i^3 = i \cdot i \cdot i = (i \cdot i) \cdot i = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

b. $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i \cdot i) \cdot (i \cdot i) = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

c. $(2i)^{-4} = \dfrac{1}{(2i)^4} = \dfrac{1}{2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i} = \dfrac{1}{16 i^4} = \dfrac{1}{16 \cdot 1} = \dfrac{1}{16}$

Observação

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0, por isso excluímos a base zero da definição $w^0 = 1$.

Propriedades das potências

Com a definição de potência e com as propriedades da multiplicação, demonstra-se que, para quaisquer números complexos *w* e *v*, e quaisquer números inteiros *m* e *n*, valem as propriedades a seguir, considerando obedecidas as condições de existência:

P1. $w^n \cdot w^m = w^{n+m}$

P2. $w^n : w^m = w^{n-m}$

P3. $(w^n)^m = w^{nm}$

P4. $(wv)^n = w^n v^n$

P5. $\left(\dfrac{w}{v}\right)^n = \dfrac{w^n}{v^n}$

Defina potência de um número complexo com expoente inteiro e peça aos estudantes que calculem as potências a seguir, apresentando o resultado na forma algébrica.
- $(4 + i)^2$
(resposta: $15 + 8i$)
- $(4 + i)^3$
(resposta: $52 + 47i$)

Apresente as propriedades das potências, refazendo o **exercício resolvido 5** na lousa com a participação dos estudantes.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. Calcule o valor numérico de: $(2 + i)^4 \cdot (1 + 2i)^4$

Resolução

$$(2+i)^4 \cdot (1+2i)^4 \overset{P4}{=} [(2+i)(1+2i)]^4 = [2 + 4i + i + 2i^2]^4 =$$

$$= [2 + 4i + i - 2]^4 = [5i]^4 \overset{P4}{=} 5^4 \cdot i^4 \overset{P3}{=} 5^4 \cdot (i^2)^2 = 5^4 \cdot (-1)^2 = 625 \cdot 1 = 625$$

Potências de i

O cálculo das potências de números complexos com expoentes inteiros envolve, particularmente, potências de **i**. Para agilizar esse tipo de cálculo, é conveniente conhecer o teorema a seguir.

Existem quatro, e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Demonstração

Sendo *n* um número inteiro, vamos calcular o valor da potência i^n.

1º caso: $n \geqslant 0$

Dividindo o expoente *n* por 4, obtemos um quociente inteiro *q* e um resto inteiro *r* tal que $0 \leqslant r < 4$, isto é, $n = 4q + r$. Assim, aplicando as propriedades das potências, temos:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Como *r* é inteiro e $0 \leqslant r < 4$, concluímos que i^r é um dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

$2^{\underline{o}}$ caso: $n < 0$

$$i^n = (i^{-1})^{-n}$$

Observando que $i^{-1} = \frac{1}{i}$, vamos multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{1}{i}$ por $-i$:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

Assim, temos:

$$i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n} \cdot i^{-n}$$

Como $n < 0$, temos $-n > 0$; portanto, pelo $1^{\underline{o}}$ caso, i^{-n} é um dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

E, como $(-1)^{-n}$ é igual a 1 ou -1, concluímos que $(-1)^{-n} \cdot i^{-n}$ é um dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

Consequência

Para o cálculo da potência i^n com n inteiro e $n \geqslant 4$, dividimos n por 4, obtendo um resto inteiro r. Temos, então, $i^n = i^r$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Calcule:

a. i^{14} **b.** i^{61} **c.** i^{100} **d.** i^{-25}

Resolução

a. Dividimos 14 por 4, obtendo resto 2. Logo: $i^{14} = i^2 = -1$

b. Dividimos 61 por 4, obtendo resto 1. Logo: $i^{61} = i^1 = i$

c. Dividimos 100 por 4, obtendo resto 0. Logo: $i^{100} = i^0 = 1$

d. $i^{-25} = \frac{1}{i^{25}}$

Dividimos 25 por 4, obtendo resto 1. Logo:

$$i^{-25} = \frac{1}{i^{25}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

12. Calcule o valor de cada uma das potências:

a. i^{65} **12. a.** i

b. i^{36} **12. b.** 1

c. i^{22} **12. c.** –1

d. i^{51} **12. d.** –i

e. $(2i)^7$ **12. e.** –128i

f. $(3i)^3$ **12. f.** –27i

g. $(1 + i)^{16}$ **12. g.** 256

h. $(1 + i)^{17}$ **12. h.** 256 + 256i

13. Um número complexo z é tal que $z^2 = 3 + 4i$ e $z^3 = 2 + 11i$. Aplicando as propriedades das potências, calcule:

a. z^5 **13. a.** –38 + 41i

b. z^6 **13. b.** –117 + 44i

c. z^{-1} **13. c.** $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

14. Faça o que se pede.

a. Calcule $(1 - i)^2$. **14. a.** –2i

b. Observando o resultado obtido no item **a**, calcule $(1 - i)^{12}$. **14. b.** –64

c. Mostre que o número complexo $1 - i$ é raiz da equação $z^{13} + 32z^2 + 64 = 0$.
14. c. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

15. Um número complexo w é uma raiz quadrada de um número complexo z se, e somente se, $w^2 = z$.

a. Mostrem que os números a seguir são raízes quadradas do número complexo $z = 4i$.

- $w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;
- $w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

15. a. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

b. Determinem as raízes quadradas complexas de -36. **15. b.** 6i e –6i

c. Resolvam em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 2x + 10 = 0$.
15. c. $S = \{1 + 3i, 1 - 3i\}$

16. Elabore um problema envolvendo raízes quadradas de um número complexo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **16.** Resposta pessoal.

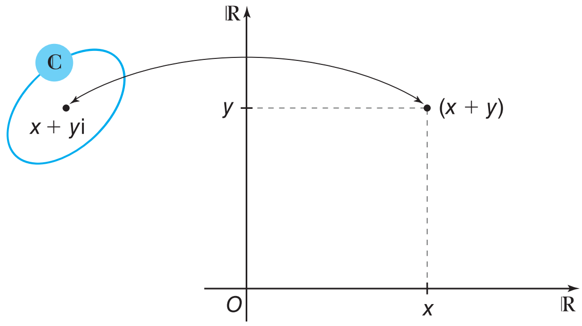
Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 e 7.

Esse assunto pode ser introduzido com base no texto a seguir a fim de evidenciar que os conhecimentos matemáticos são uma construção fruto do trabalho de diversas pessoas.

Quando você estudou o conjunto dos números reais, percebeu que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto ℝ e o conjunto dos pontos de uma reta. Assim, podemos representar, geometricamente, o conjunto ℝ pelo conjunto dos pontos de uma reta. Como representar, geometricamente, o conjunto dos números complexos? No final do século XVIII, em 1799, o topógrafo norueguês Caspar Wessel (1745-1818) publicou um trabalho em que mostrava uma representação geométrica para os números complexos. Wessel raciocinou da seguinte maneira: o conjunto dos números do tipo, sendo *x* e *y* reais, pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto dos pares ordenados de números reais (*x*, *y*), e o conjunto desses pares, por sua vez, pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto dos pontos de um plano através de um sistema cartesiano de eixos. Desse modo, cada ponto (*x*, *y*) do plano cartesiano passa a representar o número complexo, e, portanto, a representação geométrica do conjunto ℂ é um plano. Em 1806, o matemático Jean Robert Argand (1768-1822), sem conhecer o trabalho de Wessel, criou a mesma representação para os números complexos, e a glória dessa criação acabou ficando ligada ao nome de Argand. Partindo das ideias de Wessel e Argand, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) complementou o estudo do plano complexo, também conhecido como plano de Argand-Gauss. Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 7** e **8** e defina lugar geométrico.

4. Representação geométrica do conjunto dos números complexos

A cada número complexo $z = x + yi$, em que x e y são números reais, vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y). Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano, e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo.



Por meio dessa associação, representa-se geometricamente o conjunto ℂ pelo plano, que é chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos seus criadores: o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e o guarda-livros suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

No plano de Argand-Gauss, o eixo das abscissas, indicado por **Re**, é chamado de **eixo real**, e o eixo das ordenadas, indicado por **Im**, é chamado de **eixo imaginário**. Cada ponto $P(x, y)$ desse plano é a **imagem** ou **afixo** do número complexo $x + yi$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

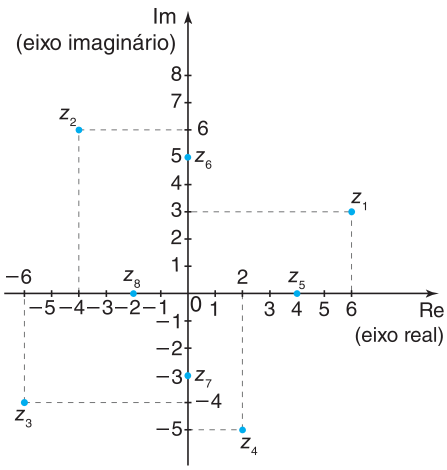
7. Represente no plano de Argand-Gauss a imagem de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 6 + 3i$
b. $z_2 = -4 + 6i$
c. $z_3 = -6 - 4i$
d. $z_4 = 2 - 5i$
e. $z_5 = 4$
f. $z_6 = 5i$
g. $z_7 = -3i$
h. $z_8 = -2$

Resolução

Aos números z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 e z_8 associamos os pontos determinados pelos pares ordenados de números reais (6, 3), (−4, 6), (−6, −4), (2, −5), (4, 0), (0, 5), (0, −3) e (−2, 0), respectivamente.

Plano de Argand-Gauss



No **exercício proposto 17**, sobre L. G., sugira aos estudantes que substituam a variável complexa *z* pela sua forma algébrica, ou seja, $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Isso faz com que a equação do L. G. seja obtida na forma cartesiana, o que facilita sua identificação.
No **exercício proposto 18**, enfatize que um número complexo pode ser interpretado como um vetor. Mostre que a soma de dois vetores representados pelos números complexos *z* e *w* é o vetor representado pela soma $z + w$. Faça o mesmo para a diferença de vetores e para o produto de vetor por número real.

8. Represente no plano complexo o lugar geométrico (L.G.) das imagens dos números complexos z que satisfazem a equação $zi - \bar{z} = -3 + 3i$.

Resolução

Lugar geométrico é qualquer conjunto de pontos, podendo até mesmo ser o conjunto vazio. Desse modo, o enunciado dessa questão pede o conjunto de pontos do plano complexo que representam os números complexos z tais que: $zi - \bar{z} = -3 + 3i$

Indicamos o número complexo z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, obtendo:

$zi - \bar{z} = -3 + 3i \Rightarrow (x + yi)i - (x - yi) = -3 + 3i$

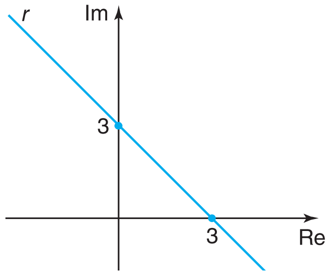
$\therefore xi - y - x + yi = -3 + 3i$

$\therefore -(x + y) + (x + y)i = -3 + 3i$

Pela definição de igualdade entre números complexos, temos:

$$\begin{cases} -(x + y) = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = 3$$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + yi$ é a reta r de equação $x + y = 3$, cujo gráfico é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

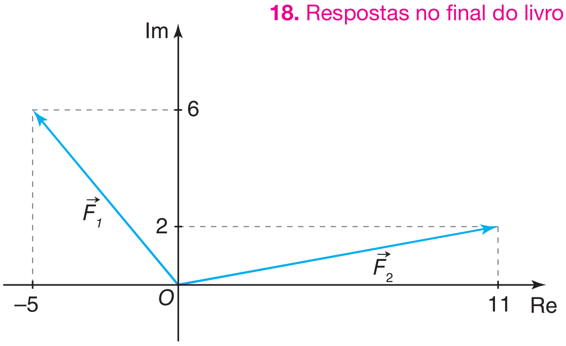
17. Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. (lugar geométrico) das imagens dos números complexos z tais que $\bar{z} = \frac{16}{z}$.

17. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

18. No estudo de grandezas vetoriais no plano, é comum adotar o plano complexo para a representação dos vetores, convencionando-se que cada número complexo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, representa um vetor de origem no afixo do número $0 + 0i$ (origem do sistema de eixos) e extremidade no afixo de z. A vantagem dessa representação reside no fato de que as operações de adição de vetores e de multiplicação de um número real por um vetor podem ser efetuadas com os números complexos que os representam. Por exemplo, a soma dos vetores representados por $z = 4 + 4i$ e $w = 6 + 2i$ é o vetor representado por $z + w = 10 + 6i$, e o produto do número real 2 pelo vetor representado pelo número complexo $u = 4 + 3i$ é o vetor representado por $2u = 8 + 6i$.
De acordo com essas informações, façam o que se pede.

a. Considerem duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aplicadas simultaneamente a um ponto material localizado na origem O do sistema de eixos do plano complexo, conforme mostra o esquema a seguir. Representem a força $\vec{F}$ resultante das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que atuam no ponto material.

18. Respostas no final do livro.

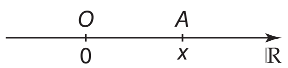


b. Mostrem que o vetor $\vec{F}$ representado no item **a** é diagonal de um paralelogramo do qual $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são lados consecutivos.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 8.

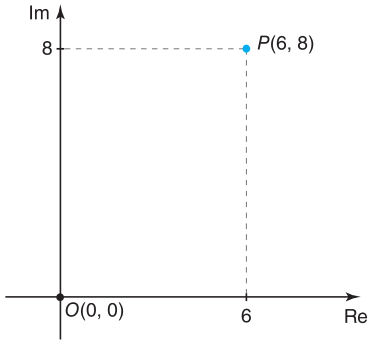
5. Módulo de um número complexo

Vamos revisar a definição de módulo de um número real x. Para isso, consideramos no eixo real de origem O um ponto A de abscissa x e definimos o módulo de x como a distância entre O e A.



$|x| = OA$

Se estendermos essa definição para o plano complexo, teremos a definição de **módulo de um número complexo**. Por exemplo, consideremos a imagem P do número complexo $z = 6 + 8\text{i}$:

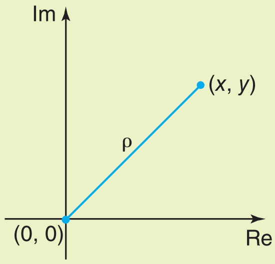


A distância entre a origem O e P é chamada de **módulo** do número complexo $z = 6 + 8\text{i}$.

$$|z| = OP = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore |z| = |6 + 8\text{i}| = 10$$

O **módulo ρ** de um número complexo $z = x + y\text{i}$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x, y) à origem $(0, 0)$ do sistema de eixos do plano de Argand-Gauss.



$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observação

Adotaremos a letra grega ρ (rô) para indicar o módulo do complexo z.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Calcule o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a. $z_1 = 12 + 5\text{i}$

b. $z_2 = 2 - 4\text{i}$

c. $z_3 = 6\text{i}$

d. $z_4 = -4$

Resolução

a. $|z_1| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

b. $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c. $|z_3| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$

d. $|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

10. Represente no plano complexo o L.G. das imagens dos números complexos z tais que $|z - 5| = 4$.

Resolução

Indicando o número complexo z por $x + y\text{i}$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

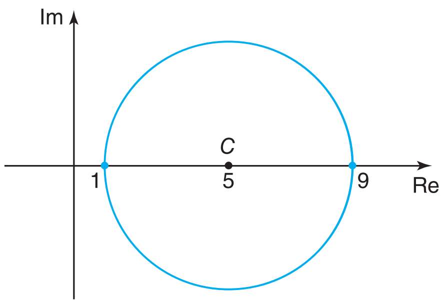
$$|z - 5| = 4 \Rightarrow |x + y\text{i} - 5| = 4$$

$$\therefore |(x - 5) + y\text{i}| = 4$$

Aplicando a definição de módulo de um número complexo, obtemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 4 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 16$$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + y\text{i}$ é a circunferência de equação $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, de centro $(5, 0)$ e raio 4, cujo gráfico é:



Reflexão

A equação $|x| = 6$ tem quantas raízes reais? E quantas raízes complexas?

Reflexão. Na reta real existem apenas dois pontos que distam 6 unidades da origem O; logo, a equação $|x| = 6$ possui apenas duas raízes reais: 6 e -6.
No plano complexo existem infinitos pontos que distam 6 unidades da origem O; logo, a equação $|x| = 6$ possui infinitas raízes complexas, que são os números cujos afixos formam a circunferência de centro O e raio 6.

Propriedades do módulo de um número complexo

Sendo z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer e n um número inteiro, temos:

M1. $|z| \geqslant 0$

M2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

M3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

M4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$

M5. $|z^n| = |z|^n$, para todo n se $z \neq 0$ ou para $n > 0$ se $z = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Calcule:

a. $|(6 + 8i)(4 - 3i)|$

b. $\left|\frac{4 + 2i}{15 - 8i}\right|$

c. $|(3 - i)^6|$

Resolução

a. Aplicando a propriedade M3 dos módulos, temos:

$$|(6 + 8i)(4 - 3i)| = |(6 + 8i)| \cdot |(4 - 3i)| =$$
$$= \sqrt{6^2 + 8^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{25} = 10 \cdot 5 = 50$$

b. Pela propriedade M4 dos módulos, temos:

$$\left|\frac{4 + 2i}{15 - 8i}\right| = \frac{|4 + 2i|}{|15 - 8i|} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2}}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{289}} = \frac{2\sqrt{5}}{17}$$

c. Aplicando a propriedade M5 dos módulos, temos:

$$|(3 - i)^6| = |3 - i|^6 = \left(\sqrt{3^2 + (-1)^2}\right)^6 = (\sqrt{10})^6 = 10^3 = 1.000$$

12. Um número complexo é igual ao inverso do seu conjugado. Calcule o módulo desse número complexo.

Resolução

Indicando por z esse número complexo, temos: $z = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$

Pela propriedade M2, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Assim: $|z|^2 = 1$ e, portanto, $|z| = 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Calcule:

a. $|4 + 3i|$ **19. a.** 5

b. $|12 - 5i|$ **19. b.** 13

c. $|4i|$ **19. c.** 4

d. $|-7i|$ **19. d.** 7

e. $|9|$ **19. e.** 9

f. $|-6|$ **19. f.** 6

20. Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. das imagens dos números complexos z em cada um dos casos.

a. $|z - 3| = 6$

b. $|z - 2 + 5i| = 4$

20. Respostas no final do livro.

21. Faça o que se pede.

a. Dentre os números complexos z, tais que $|z - 3i| = 5$, determine o de maior módulo. **21. a.** $z = 8i$

b. Dentre os números complexos w, tais que $|w - (1 + i)| = 2\sqrt{2}$, determine o de menor módulo. **21. b.** $w = -1 - i$

22. Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. das imagens dos números complexos z em cada um dos casos. **22.** Respostas no final do livro.

a. $|z| + |3z| = 4$

b. $z \cdot \bar{z} = |4z|$

23. Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z nos seguintes casos. **23.** Respostas no final do livro.

a. $|z|^2 + |z + \bar{z}|^2 = 1$

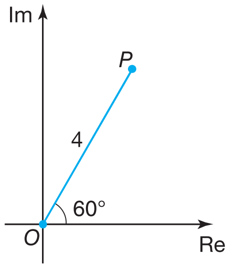
b. $z \cdot \bar{z} - |z| + 1 = 0$

24. Elabore um problema envolvendo lugar geométrico no plano complexo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **24.** Resposta pessoal.

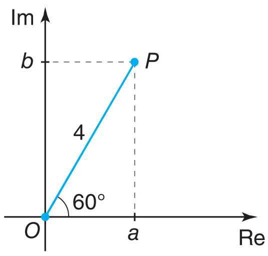
Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 e 10.

6. Coordenadas polares no plano complexo

A imagem de um número complexo não nulo no plano de Argand-Gauss pode ser determinada também por meio de uma distância e de um ângulo. Por exemplo, existe um único número complexo z cuja imagem P dista 4 unidades da origem O do sistema de modo que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ forma com o semieixo positivo Ox um ângulo de 60°, medido no sentido anti-horário, a partir desse semieixo.



As medidas 4 e 60° são chamadas de **coordenadas polares** da imagem do número complexo z. Com essas coordenadas podemos determinar a parte real a e a parte imaginária b do número z.



$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{a}{4} \\ \operatorname{sen} 60° = \dfrac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a = 2 \text{ e } b = 2\sqrt{3}$$

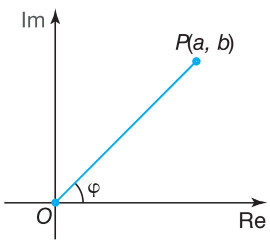
Logo, a forma algébrica do número z é:

$$z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$$

Reciprocamente, a partir da forma algébrica podemos determinar as coordenadas polares de um número complexo não nulo, conforme apresentaremos a seguir.

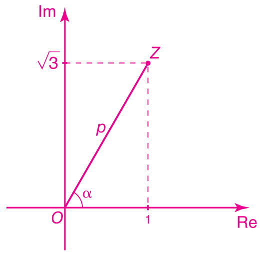
Argumento de um número complexo

Dado um número complexo não nulo $z = a + b\mathrm{i}$, com a e b reais, consideremos no plano complexo os pontos $O(0, 0)$, $P(a, b)$ e o ângulo de medida φ (lemos: "fi") cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta $\overrightarrow{OP}$, conforme a figura a seguir.



A medida φ, obtida no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo Ox, com $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ou $0° \leqslant \varphi < 360°$, é chamada de **argumento** do número complexo z.

Com o intuito de estimular a iniciativa dos estudantes, proponha o exercício a seguir, antes do estudo do tópico 6.
Considerando o número complexo z representado no plano de Argand-Gauss a seguir, faça o que se pede.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine a distância r, que representa $|z|$. (2)
b) Determine $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$. ($\cos \alpha = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$)
c) Determine a medida angular α, com $0° \leq \alpha < 360°$. ($\alpha = 60°$)
Após essa discussão, defina argumento de um número complexo e apresente a forma trigonométrica.
Peça aos estudantes que representem, na forma trigonométrica, o número complexo z do gráfico anterior.
($z = 2(\cos 60° + \mathrm{i} \operatorname{sen} 60°)$).

Observação

O único número complexo para o qual **não se define** argumento é o número $z = 0$. Assim, um número complexo possui argumento se, e somente se, é diferente de zero.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

13. Obtenha o argumento de cada um dos números complexos a seguir.

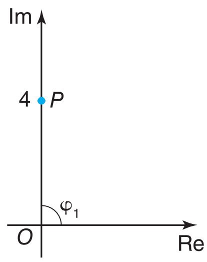
a. $z_1 = 4i$ **c.** $z_3 = 6$

b. $z_2 = -5i$ **d.** $z_4 = -3$

Resolução

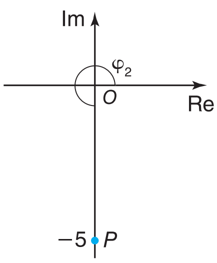
Quando a imagem P de um número complexo não nulo pertence a um dos eixos coordenados, o argumento desse número é facilmente obtido pelo gráfico.

a.



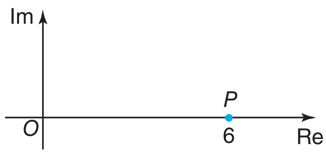
$\varphi_1 = 90°$ ou $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ rad

b.



$\varphi_2 = 270°$ ou $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ rad

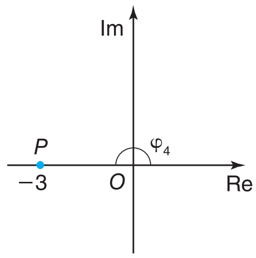
c.



Como a semirreta $\overrightarrow{OP}$ coincide com o semieixo positivo Ox e como $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ou $0° \leqslant \varphi < 360°$, temos:

$\varphi_3 = 0°$ ou $\varphi_3 = 0$ rad

d.



$\varphi_4 = 180°$ ou $\varphi_4 = \pi$ rad

Cálculo do argumento de um número complexo

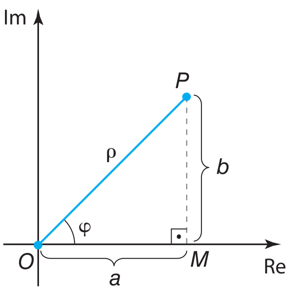
Observação

Em Engenharia elétrica, na análise de circuitos de corrente alternada, os fasores são usados para representar tensões e correntes. O argumento do fasor indica a fase da senoide correspondente.

No exercício resolvido anterior, foi apresentado que, se a imagem do número complexo não nulo pertence a um dos eixos coordenados, então é muito simples a determinação do argumento. Vamos estudar agora o cálculo do argumento quando a imagem do número complexo não pertence a nenhum dos eixos coordenados.

Demonstraremos apenas para $a > 0$ e $b > 0$; porém, o resultado obtido vale também para os demais casos ($a < 0$ e $b > 0$, $a < 0$ e $b < 0$, $a > 0$ e $b < 0$).

Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do 1º quadrante:



A distância $OP = \rho$ é o módulo de z, isto é:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

No triângulo OMP, temos: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} & (2) \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\rho} & (3) \end{cases}$

As igualdades (1), (2) e (3) determinam o argumento de z.

Nota:

As igualdades (1), (2) e (3), obtidas nos quatro casos, são válidas também quando a imagem $P(a, b)$ do número complexo não nulo $z = a + bi$ pertence a um dos eixos coordenados.

Os quatro casos e a nota anterior nos permitem enunciar:

Se $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é um número complexo não nulo, de módulo ρ e argumento φ, então:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

14. Calcule o módulo e o argumento de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z = 2\sqrt{3} + 2i$ **b.** $w = 4 - 4i$

Resolução

a. $z = 2\sqrt{3} + 2i \begin{cases} \text{parte real: } a = 2\sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } b = 2 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número z são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \therefore \varphi = 30°$$

Concluímos, então, que o número complexo z tem módulo 4 e argumento $30°$ $\left(\text{ou } \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$.

b. $w = 4 - 4i \begin{cases} \text{parte real: } a = 4 \\ \text{parte imaginária: } b = -4 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número w são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \varphi = -\dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \therefore \varphi = 315°$$

Concluímos, então, que o número complexo w tem módulo $4\sqrt{2}$ e argumento $315°$ $\left(\text{ou } \dfrac{7\pi}{4} \text{ rad}\right)$.

Forma trigonométrica de um número complexo

Para todo número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, de módulo ρ e argumento φ, temos:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \text{ sen } \varphi \end{cases}$$

Observação

A forma trigonométrica de um número complexo facilita operações com esses números, como a multiplicação e divisão ou a potenciação.

Observação

Embora não se defina o argumento do número complexo $z = 0$, pode-se representar $z = 0$ sob a forma trigonométrica $z = 0(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$, para qualquer valor de φ.

Assim, podemos representar o número $z = a + bi$ sob a forma $z = \rho\cos\varphi + (\rho\,\text{sen}\,\varphi)i$ ou, ainda:

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)}$$

Essa forma é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar** do número complexo z.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

15. Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 2 + 2i$ **b.** $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}i$ **c.** $z_3 = -4i$

Resolução

a. $z_1 = 2 + 2i \begin{cases} \text{parte real: } a = 2 \\ \text{parte imaginária: } b = 2 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número z_1 são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \varphi = 45°$$

Logo, a forma trigonométrica de z_1 é:

$$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°) \text{ ou } z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

b. $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}i \begin{cases} \text{parte real: } a = -5 \\ \text{parte imaginária: } b = 5\sqrt{3} \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número z_2 são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10$$

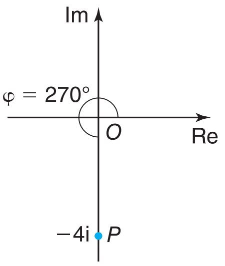
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \therefore \varphi = 120°$$

Logo, a forma trigonométrica de z_2 é:

$$z_2 = 10(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°) \text{ ou } z_2 = 10\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

c. $z_3 = -4i$

Como z_3 é um imaginário puro, sua imagem pertence ao eixo imaginário e, nesse caso, podemos obter graficamente o módulo e o argumento de z_3, sendo desnecessárias as fórmulas.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O módulo de $z_3 = -4i$ é a distância ρ do ponto P à origem O do sistema, isto é, $\rho = 4$.

Logo, a forma trigonométrica de z_3 é:

$$z_3 = 4(\cos 270° + i\,\text{sen}\,270°) \text{ ou}$$

$$z_3 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Nota:

Pode-se representar um número complexo não nulo z também na seguinte forma:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \text{ com } \varphi \notin [0, 2\pi[\text{ e } \varphi \notin [0°, 360°[$$

Por exemplo, $z = 8(\cos 390° + i \operatorname{sen} 390°)$.

Essa forma de representação é denominada **forma trigonométrica secundária**, e a medida φ é chamada de **argumento secundário** de z.

Note que z é igual a: $8(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.

Para que não haja confusão de linguagem, convencionamos que:

- ao usar a expressão "argumento de um número complexo", estamos nos referindo à medida φ no intervalo $[0, 2\pi[$ ou $[0°, 360°[$ (alguns autores chamam esse argumento de argumento principal);
- ao usar a expressão "forma trigonométrica de um número complexo", estamos nos referindo à forma $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, com $0° \leqslant \varphi < 360°$ ou $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

25. Represente no plano complexo os números $z_1 = 4i$, $z_2 = -5$, $z_3 = -6i$ e $z_4 = 3$, e determine o módulo e o argumento de cada um deles.

25. Resposta no final do livro.

26. Sabendo que o argumento de um número complexo z é $\frac{\pi}{7}$ rad, determine o argumento de cada um dos seguintes números:

a. $\bar{z}$ **26. a.** $\frac{13\pi}{7}$

b. $-z$ **26. b.** $\frac{8\pi}{7}$

c. $-\bar{z}$ **26. c.** $\frac{6\pi}{7}$

27. Calcule o módulo e o argumento de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 1 + i$ **27. a.** $\sqrt{2}$; 45°

b. $z_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$ **27. b.** 2; 300°

c. $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\, i}{2}$ **27. c.** 1; 135°

d. $z_4 = -5\sqrt{3} - 5i$ **27. d.** 10; 210°

28. Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos.

a. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$

b. $z_2 = 1 - i$

c. $z_3 = -\sqrt{3} + i$

28. a. $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ ou $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

28. b. $\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ ou $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

28. c. $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ ou $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

29. Represente na forma algébrica cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$ **29. a.** $2i$

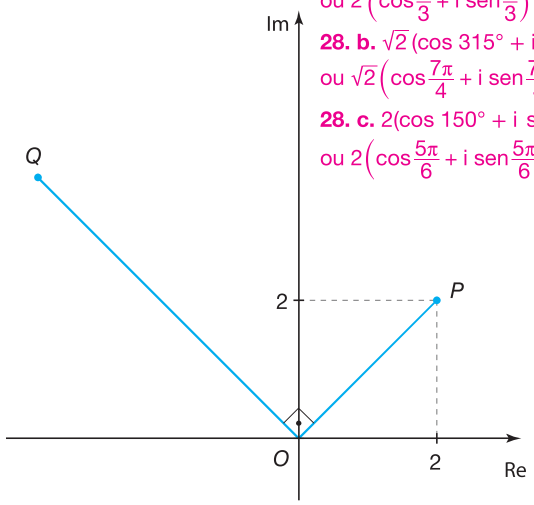
b. $z_2 = 6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ **29. b.** $3\sqrt{3} + 3i$

c. $z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$ **29. c.** $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

30. Demonstra-se que a distância d entre as imagens de dois números complexos z_1 e z_2 no plano de Argand-Gauss é dada por $d = |z_1 - z_2|$. De acordo com essa propriedade, resolva a questão a seguir.

No plano de Argand-Gauss a seguir, os pontos P e Q são imagens dos números complexos z_1 e z_2, respectivamente, com $|z_1 - z_2| = 6$. Determine a forma algébrica de z_2.

30. $z_2 = -\sqrt{14} + \sqrt{14}\, i$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

31. Elabore um problema envolvendo forma trigonométrica de um número complexo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

31. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 11 e 12.

Demonstre as fórmulas que resultam da multiplicação e da divisão de números complexos na forma trigonométrica. A seguir, apresentamos a multiplicação. A divisão é análoga.
$z \cdot w = \rho(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha) \cdot \lambda(\cos\beta + i \text{ sen } \beta) =$
$= \rho\lambda(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)(\cos\beta + i \text{ sen } \beta) =$
$= \rho\lambda(\cos\alpha \cdot \cos\beta + i \cos\alpha \cdot \text{sen } \beta + i \text{ sen } \alpha \cdot \cos\beta + i^2 \text{ sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta) =$
$= \rho\lambda[\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta + i(\cos\alpha \cdot \text{sen } \beta + \text{sen } \alpha \cdot \cos\beta)]$
$\therefore z \cdot w = \rho\lambda[\cos(\alpha + \beta) + i(\text{sen } \alpha + \beta)]$
Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 16** e **17**.

7. Operação com números complexos na forma trigonométrica

Multiplicação

Sejam os números complexos $z = 3(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$ e $w = \sqrt{2}\,(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$. Efetuando a multiplicação $z \cdot w$, temos:

$$z \cdot w = 3(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \cdot \sqrt{2}\,(\cos 240° + i \text{ sen } 240°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\,(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$z \cdot w = 3\sqrt{2}\,(\cos 30° \cos 240° + i \cos 30° \text{sen } 240° + i \text{ sen } 30° \cos 240° + i^2 \text{ sen } 240° \text{sen } 30°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\,(\cos 30° \cos 240° + i \cos 30° \text{sen } 240° + i \text{ sen } 30° \cos 240° - \text{sen } 240° \text{sen } 30°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\,[(\cos 30° \cos 240° - \text{sen } 240° \text{sen } 30°) + i\,(\cos 30° \text{sen } 240° + \text{sen } 30° \cos 240°)] =$$
$$= 3\sqrt{2}\,[\cos(30° + 240°) + i \text{ sen } (30° + 240°)]$$

Generalizando esse resultado, temos:

Se $z = \rho(\cos\alpha + i \text{sen } \alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i \text{sen } \beta)$ são as formas trigonométricas dos números complexos z e w, então: $z \cdot w = \rho\lambda[\cos(\alpha + \beta) + i \text{sen } (\alpha + \beta)]$.

Nota:
A propriedade associativa da multiplicação de números complexos permite a extensão dessa fórmula para o produto de mais de dois números da seguinte maneira: sendo $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, com $n \geqslant 2$, cujas formas trigonométricas são $\rho_1(\cos\alpha_1 + i\text{sen } \alpha_1)$, $\rho_2(\cos\alpha_2 + i\text{sen } \alpha_2)$, $\rho_3(\cos\alpha_3 + i\text{sen } \alpha_3)$, ... e $\rho_n(\cos\alpha_n + i\text{sen } \alpha_n)$, respectivamente, tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n =$$
$$= \rho_1(\cos\alpha_1 + i\text{sen } \alpha_1) \cdot \rho_2(\cos\alpha_2 + i\text{sen } \alpha_2) \cdot \rho_3(\cos\alpha_3 + i\text{sen } \alpha_3) \cdot \ldots \cdot \rho_n(\cos\alpha_n + i\text{sen } \alpha_n) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_n \cdot [\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) + i\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)]$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16. Sendo $z_1 = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$, $z_2 = 2(\cos 25° + i \text{ sen } 25°)$ e $z_3 = 5(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$, calcule:

a. $z_1 \cdot z_2$

b. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

Resolução

a. $z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°) \cdot 2(\cos 25° + i \text{ sen } 25°) = 3 \cdot 2 \cdot [\cos(20° + 25°) + i\text{sen } (20° + 25°)] =$

$= 6[\cos 45° + i\text{sen } 45°] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right] \therefore z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$

b. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 3(\cos 20° + i\text{sen } 20°) \cdot 2(\cos 25° + i\text{sen } 25°) \cdot 5(\cos 90° + i\text{sen } 90°) =$

$= 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot [\cos(20° + 25° + 90°) + i\text{sen}(20° + 25° + 90°)] = 30[\cos 135° + i\text{sen } 135°] \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 30\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right]$

$\therefore z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -15\sqrt{2} + 15\sqrt{2}\,i$

17. Sendo $z = \rho(\cos\varphi + i\text{sen } \varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z, calcule:

a. z^2

b. z^3

Resolução

a. $z^2 = z \cdot z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = \rho \cdot \rho \cdot [\cos(\varphi + \varphi) + i\,\text{sen}\,(\varphi + \varphi)] \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = \rho^2[\cos 2\varphi + i\,\text{sen}\,2\varphi]$

b. $z^3 = z \cdot z \cdot z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) =$

$= \rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot [\cos(\varphi + \varphi + \varphi) + i\,\text{sen}\,(\varphi + \varphi + \varphi)] \Rightarrow z^3 = \rho^3[\cos 3\varphi + i\,\text{sen}\,3\varphi]$

Divisão

Do mesmo modo que fizemos para a multiplicação, podemos generalizar o resultado para a divisão de números complexos na forma trigonométrica.

Assim:

Se $z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, com $w \neq 0$, então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)]$$

Demonstração

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \cdot \lambda(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta)}{|w|^2} =$$

$$= \frac{\rho\lambda(\cos\alpha\,\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta\,\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta)}{\lambda^2}$$

$$\therefore \frac{z}{w} = \frac{\rho\lambda}{\lambda^2}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)] = \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)]$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

18. Sendo $z_1 = 8(\cos 70° + i\,\text{sen}\,70°)$ e $z_2 = 2(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)$, calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2} \cdot [\cos(70° - 40°) + i\,\text{sen}\,(70° - 40°)] =$$

$$= 4[\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°] = 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right] = 2\sqrt{3} + 2i$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

32. Considere os números complexos:

- $z = 2(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$
- $u = 8(\cos 255° + i\,\text{sen}\,255°)$
- $w = \cos 120° + i\,\text{sen}\,120°$

Dê a forma algébrica do resultado de cada uma das expressões.

a. $z \cdot u$ **32. a.** $8 - 8\sqrt{3}i$

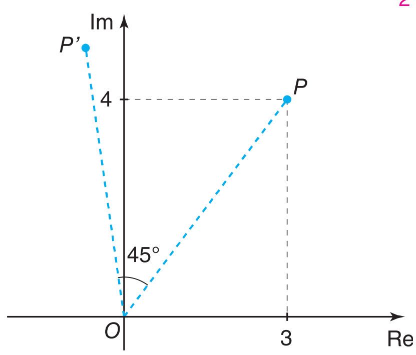
b. $\frac{u}{z}$ **32. b.** $-2\sqrt{3} - 2i$

c. $\frac{z}{u}$ **32. c.** $-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$

d. $\frac{uz}{w}$ **32. d.** -16

33. Seja $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z, e seja $w = 7(\cos 18° + i\,\text{sen}\,18°)$. Determine ρ e φ de modo que $\frac{z}{w} = \sqrt{3} + i$. **33.** 14; 48°

34. No plano complexo a seguir, o ponto P' é obtido por uma rotação de 45° de P em torno da origem O, no sentido anti-horário. Determine o número complexo z' cuja imagem é P'. **34.** $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2}i$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 13 e 14.

Potências de números complexos na forma trigonométrica

Sendo $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo não nulo z, temos:

- $z^0 = 1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = \rho^0(\cos \mathbf{0}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{0}\varphi)$
- $z^1 = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = \rho^1(\cos \mathbf{1}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{1}\varphi)$
- $z^2 = \rho^2(\cos \mathbf{2}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{2}\varphi)$
- $z^3 = \rho^3(\cos \mathbf{3}\varphi + i\,\text{sen}\,\mathbf{3}\varphi)$

Observe que cada resultado apresenta o módulo ρ elevado ao expoente de z e o argumento φ multiplicado por esse expoente. Essas constatações podem ser generalizadas por meio do teorema a seguir, demonstrado pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

Observação

Obtivemos z^2 e z^3 no exercício resolvido 17.

Teorema de De Moivre

Se $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo não nulo z e n é um número inteiro qualquer, então: $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\text{sen}\,n\varphi)$

Peça aos estudantes que respondam às questões seguintes, acerca do teorema de De Moivre.

1. Considerando o número complexo $z = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$, calcule as potências seguintes, com base na multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.

a. z^1
b. z^2
c. z^3
d. z^4

Respostas:
a. $z^1 = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$
b. $z^2 = 4(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$
c. $z^3 = 8(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°)$
d. $z^4 = 16(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°)$

2. Usando o que você aprendeu até o momento, qual seria o resultado de z^n, com $n \in \mathbb{N}$?

Resposta: $z^n = 2^n(\cos(n \cdot 60°) + i\,\text{sen}\,(n \cdot 60°))$

Refaça, com a participação dos estudantes, os **exercícios resolvidos 19** e **20**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19. Sendo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{15}\right)$, calcular z^5.

Resolução

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{15}\right) \Rightarrow z^5 = 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ z^5 = 32\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$$

20. Calcule: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{10}$

Resolução

Inicialmente, vamos representar na forma trigonométrica a base z dessa potência. Para isso, determinamos seu módulo ρ e seu argumento φ:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\begin{cases}\text{parte real: } a = \frac{\sqrt{2}}{2}\\[4pt] \text{parte imaginária: } b = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Assim:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ \rho = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \begin{cases}\cos\varphi = \frac{a}{\rho}\\[4pt] \text{sen}\,\varphi = \frac{b}{\rho}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\[4pt] \text{sen}\,\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\therefore \varphi = 315°$$

Logo, a forma trigonométrica de z é dada por:

$$z = 1(\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°)$$

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$$z^{10} = 1^{10}(\cos 10 \cdot 315° + i\,\text{sen}\,10 \cdot 315°) = \cos 3.150° + i\,\text{sen}\,3.150°$$

Reduzindo 3.150° à primeira volta positiva, obtemos 270°. Assim, concluímos:

$$z^{10} = \cos 270° + i\,\text{sen}\,270° = 0 - i = -i$$

35. a. $256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $256\ \cos 120° + i\ \text{sen}\ 120°)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

35. Dado o número complexo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$, determine:

a. a forma trigonométrica de z^8;

b. o menor valor inteiro positivo n de modo que z^n seja um número real; **35. b.** 12

c. o menor valor inteiro positivo n de modo que z^n seja um número imaginário puro. **35. c.** 6

36. Calcule:

a. $(1 + \sqrt{3}\,i)^8$

b. $(-\sqrt{3} + i)^{10}$

36. a. $-128 + 128\sqrt{3}\,i$

36. b. $512 + 512\sqrt{3}\,i$

37. Sendo $z = \sqrt{3} + 3i$, determine o menor valor inteiro positivo n de modo que z^n seja um número real. **37.** 3

38. Pesquise na internet sobre a radiciação no conjunto dos números complexos. Escreva um breve texto sobre a sua pesquisa, acompanhado de exemplos.

38. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 15.

Assista aos vídeos **Um sonho complexo** e **O sonho continua**, disponíveis em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187 e https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1141, respectivamente. Acessos em: 4 ago. 2024.

Para abordar o **Trabalho e juventudes**, retome o uso prático dos números complexos em diferentes áreas, como na Engenharia elétrica e na Física. Incentive os estudantes a pesquisarem a respeito de físicos brasileiros e a comporem um breve relatório sobre a trajetória de vida deles.

TRABALHO E JUVENTUDES

Os números complexos são bastante aplicados em áreas da Física como eletromagnetismo ou Física Quântica. No Brasil, o dia 19 de maio celebra o dia do Físico, uma profissão ainda de pouca popularidade, mas que tem se impulsionado com a ciência de dados e a inteligência artificial.

A carreira que, até então, era mais restrita à academia com atuação no ensino ou nas pesquisas, agora tem o mercado de trabalho ampliado.

No entanto, para Sônia Guimarães, a primeira mulher negra a ser doutora em Física no Brasil, ainda existe uma dificuldade para pessoas pretas ingressarem na Ciência, devido ao racismo estrutural. Ela comenta que:

> [...] “Não há estímulo para o ingresso na área de exatas. Por isso, muitos desistem quando levam bomba em cálculo. Além disso, ainda há professor universitário que se certifica se o aluno negro está na sala correta. Como aguentar isso por cinco anos?” [...].

SETUBAL, Y. Conheça Sonia Guimarães, a primeira mulher negra doutora em Física no Brasil: ‘é tudo ainda muito branco e masculino’. **O Globo**, 12 mar. 2024. Disponível em: https://oglobo.globo.com/ela/noticia/2024/03/12/conheca-sonia-guimaraes-a-primeira-mulher-negra-doutora-em-fisica-no-brasil-e-tudo-ainda-muito-branco-e-masculino.ghtml. Acesso em: 16 out. 2024.

MARIA ISABEL OLIVEIRA/AGÊNCIA O GLOBO

A física Sônia Guimarães, em foto de 2024.

Você conhece outras pessoas brasileiras que atuam na Física? Sabe quais os cursos técnicos, tecnólogos ou de graduação nessa área que existem na região que você mora? Caso se interesse, faça uma pesquisa e compartilhe os resultados com os colegas.

Análise da resolução: O estudante não percebeu que certos valores distintos de n determinam números complexos iguais; por exemplo, para $n = 0$ ou $n = 5$, obtemos os números complexos iguais a $z^0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ e $z^5 = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi$. Assim, a quantidade de números complexos representados pela expressão $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}\right)^n$ é menor que 11.

Resolução correta: Pelo teorema de De Moivre, temos:

$z^n = \cos \frac{2\pi n}{5} + \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{5}$

Os números complexos da forma z^n serão distintos se, e somente se:

$0 \leq \frac{2\pi n}{5} < 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq n < 5$

Assim, temos números complexos distintos para: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$

Logo, a expressão $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leqslant 10$ representa apenas cinco números complexos distintos.

Aproveite os **Exercícios complementares** a fim de compor uma avaliação no decorrer do estudo deste capítulo. Em duplas ou trios, os estudantes podem resolver esses exercícios conforme indicado ao final de cada seção **Exercícios propostos** e comparar as estratégias de resolução. Depois, ao final do capítulo, podem retomar e resolver individualmente alguns desses exercícios novamente ou compartilhar a resolução deles com os demais colegas.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Quantos números complexos distintos são representados pela expressão

$\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 10$?

Resolução

Aplicando o teorema de De Moivre: $z^n = \cos \frac{2\pi n}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{5}$

• Para $n = 0$:

$z^0 = \cos \frac{2\pi \cdot 0}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi \cdot 0}{5} \Rightarrow z^0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$

• Para $n = 1$:

$z^1 = \cos \frac{2\pi \cdot 1}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi \cdot 1}{5} \Rightarrow z^1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$.

• Para $n = 2$:

$z^2 = \cos \frac{2\pi \cdot 2}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi \cdot 2}{5} \Rightarrow z^2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}$

• Para $n = 3$:

$z^3 = \cos \frac{2\pi \cdot 3}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi \cdot 3}{5} \Rightarrow z^3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}$

• Para $n = 4$:

$z^4 = \cos \frac{2\pi \cdot 4}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi \cdot 4}{5} \Rightarrow z^4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}$

Etc.

• Para $n = 10$:

$z^{10} = \cos \frac{2\pi \cdot 10}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi \cdot 10}{5} \Rightarrow z^{10} = \cos \frac{20\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{20\pi}{5}$

Assim, a expressão $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 10$, representa 11 números complexos distintos.

ELISA NIEVAS/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Para que valores reais de x o número complexo $(3x - 12) + (x^2 - 16)i$ é real? **1.** $x = 4$ ou $x = -4$

2. Dados os números complexos $z = x^2 + (2 + 3y)i$ e $w = x + (x - y)i$, determine os números reais x e y de modo que $z = \overline{w}$. **2.** ($x = 0$ e $y = -1$) ou $\left(x = 1 \text{ e } y = -\frac{3}{2}\right)$

3. Dados os números complexos $z = 3 - 2i$ e $w = 4 - 3i$, determine o número complexo $zw - 3iz + w^2$. **3.** $7 - 50i$

4. Resolva as equações a seguir no universo $\mathbb{C}$.

a. $2z - 4\overline{z} = 8 + 12i$ **4. a.** $S = \{-4 + 2i\}$

b. $\frac{z}{z - 2i} = \frac{\overline{z}}{i}$ **4. b.** $S = \{0, i\}$

5. (UFPA) Qual o valor de m, real, para que o produto $(2 + mi) \cdot (3 + i)$ seja um imaginário puro?

a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 10

5. alternativa **b**

6. Sendo $z = \left(\frac{i^{13} + i^9}{2}\right)^{39}$ e $w = \frac{1}{2 + i^{23}}$, em que i é a unidade imaginária, calcule o produto zw. **6.** $\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$

7. (Uepa) O número complexo $(1 + i)^9 + (1 - i)^4$ é igual a:

a. $6i$
b. $4 - 8i$
c. $-4 - 8i$
d. $2 - 12i$
e. $12 + 16i$

7. alternativa **e**

As respostas dos **exercícios propostos 8**, **9** e **11** estão no final do livro.

8. Um filme mostra o deslocamento dos estilhaços de uma granada a partir do momento da explosão. Para um estudo cinemático e dinâmico desses deslocamentos, associou-se ao plano da tela de projeção um sistema de eixos, real e imaginário, divididos em uma unidade conveniente. Em relação a esse sistema, observou-se que as posições de um dos estilhaços podiam ser descritas, em função do tempo t, em segundo, pelos números complexos da forma: $z = t + (1 - t^2)i$, em que $t = 0$ corresponde ao instante da explosão.

Represente no plano de Argand-Gauss adotado como referência:

a. O número complexo que representa a posição P desse estilhaço, 1 s após a explosão.

b. O número complexo que representa a posição Q desse estilhaço, 2 s após a explosão.

c. Todos os números complexos que descrevem a posição desse estilhaço para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

9. Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z em cada um dos casos a seguir.

a. $|z - 3i| = 5$

b. $|z + 4 - 2i| = 3$

c. $|\bar{z} + z|^2 - 3 \cdot z \cdot \bar{z} = 1$

10. As trajetórias de duas partículas, A e B, são estudadas no plano de Argand-Gauss. Enquanto a partícula A descreve a trajetória representada pelos números complexos z, com $|z - 5 - 5i| = 3$, a partícula B, partindo da origem O do sistema de eixos, é lançada em linha reta a fim de atingir a partícula A quando ela estiver o mais próximo possível de O. A trajetória da partícula B é formada por imagens dos números complexos $w = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tais que:

a. $x + 2y - 1 = 0$

b. $x = y$

c. $x + 2y = 0$

d. $x - 2y = 0$

e. $x = -4y$

10. alternativa **b**

11. Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = -2 - 2i$

b. $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

c. $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$

12. (Unicamp-SP) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3} + i$.

a. Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.

b. Qual a medida do lado desse triângulo? **12. b.** $2\sqrt{3}$

12. a. $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$; figura indicada no final do livro.

13. Sejam:

- $z = 20\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)$
- $w = 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right)$
- $u = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

Considerando esses números complexos, dê a forma algébrica dos seguintes números:

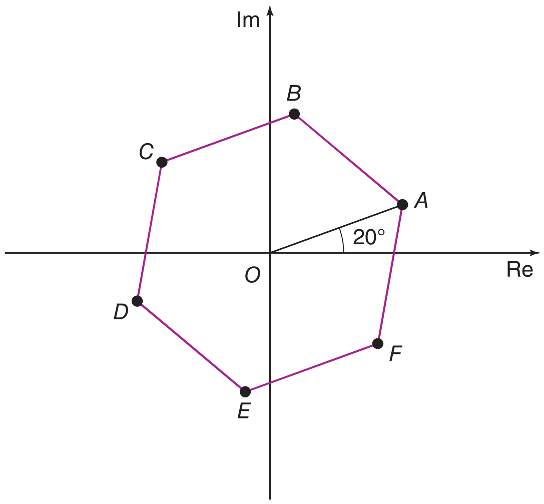
a. $\frac{z}{w}$ **13. a.** $4i$

b. $\frac{w}{u}$ **13. b.** -5

c. $\frac{wu}{z}$ **13. c.** $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}i}{8}$

d. $\frac{1}{u}$ **13. d.** $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

14. A figura a seguir mostra um hexágono regular cujo centro é a origem O do sistema de eixos e a medida do lado é 3 unidades (a unidade de comprimento do lado do hexágono é a mesma adotada nos eixos coordenados).



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

14. a. $z_A = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$

Indicando por z_A o número complexo cujo afixo é o ponto A, responda aos itens seguintes.

a. Determine a forma trigonométrica de z_A.

b. Determine a forma trigonométrica do número complexo w que multiplicado por z_A resulta no número complexo z_B cujo afixo é o ponto B.

14. b. $w = 1(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$

c. Determine a forma trigonométrica do número complexo k que multiplicado por z_A resulta no número complexo cujo afixo é obtido pela rotação de 240° do ponto A, em torno da origem O, no sentido anti-horário.

14. c. $k = 1(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°)$

d. Se P é o afixo de um número complexo $z_P = \rho(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, obtenha um número complexo z que multiplicado por z_P tem como resultado o número $z_{P'}$ cujo afixo é o ponto P', obtido por uma rotação α do ponto P, em torno da origem O do sistema de eixos do plano complexo. (α é a medida algébrica de um arco de circunferência ou de um ângulo, em grau ou radiano).

14. d. $z = 1(\cos \alpha + i\operatorname{sen} \alpha)$

15. Calcule: **15. a.** -1

a. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{100}$

b. $(2\sqrt{3} + i - i^{43})^6$

15. b. -4.096

Aborde o tema da seção **Educação midiática** incentivando os estudantes a pesquisarem o que são bolhas informacionais. Associado à área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e ao **TCT Vida familiar e social**, pode-se desenvolver um trabalho interdisciplinar que possibilite o desenvolvimento das **competências gerais 4**, **6**, **7** e **9**.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

As atividades podem ser propostas a fim de evidenciar como a inteligência artificial e os algoritmos estão sendo utilizados por grandes empresas ou pessoas para veicular informações nas redes sociais. Eles podem comentar sobre: os riscos e benefícios desses algoritmos; como eles podem ser associados à pós-verdade, às notícias falsas (*fake news*) e ao reducionismo e anticientificismo; e a capacidade de modelarem a opinião pública por meio de apelos emocionais e crenças pessoais em negligência a fatos, a dados objetivos e ao pluralismo de ideias, por exemplo.

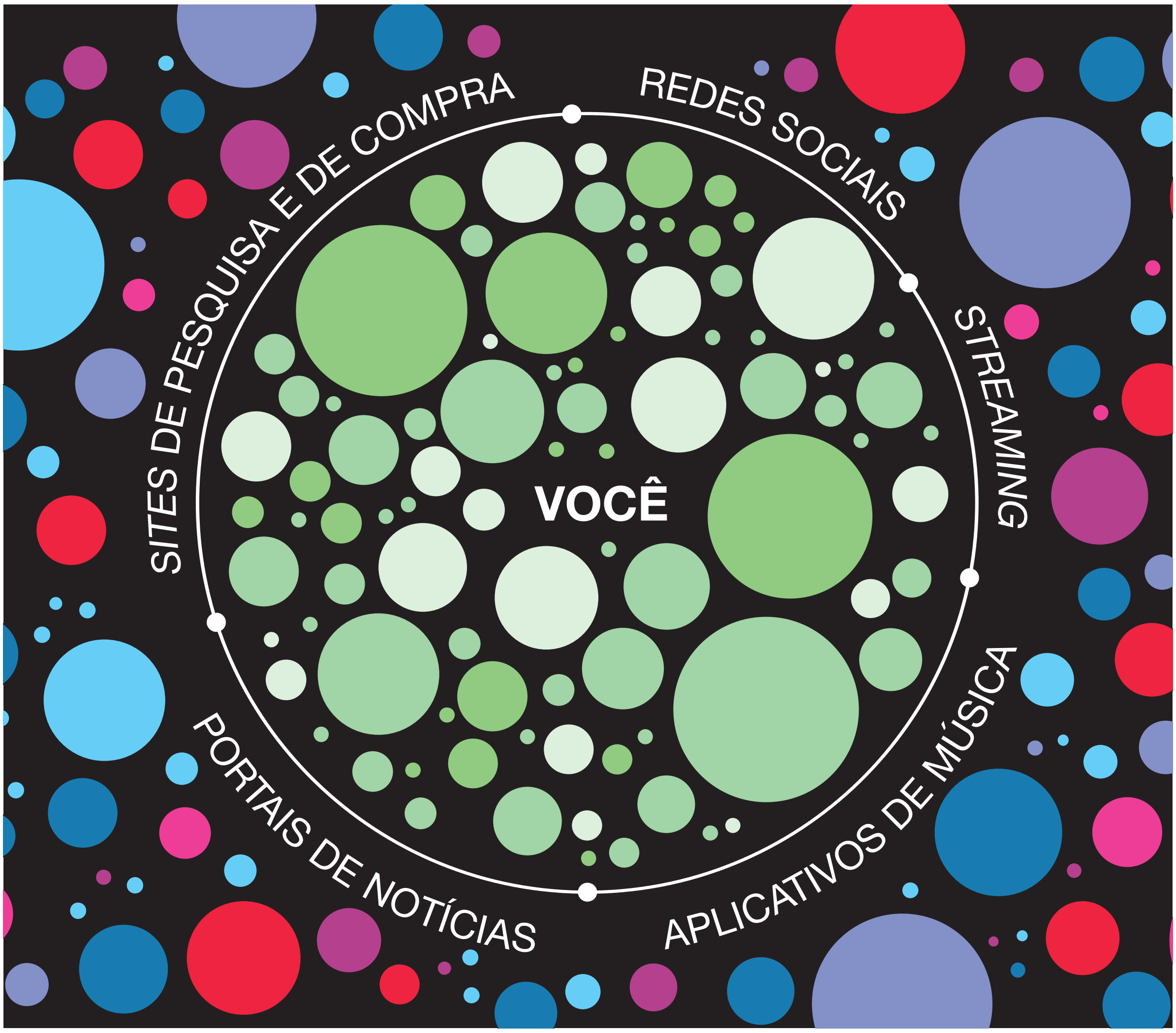
Bolhas informacionais

Se você usa redes sociais, aplicativos de música ou segue canais de vídeo *online*, já deve ter notado que as plataformas digitais fazem muitas recomendações: uma nova música, um vídeo sobre um tema que você já pesquisou antes, ou fotos de pessoas que você tem interesse em acompanhar. Em dias cansativos, é reconfortante ter esses conteúdos agradáveis ao seu alcance. As plataformas digitais conseguem criar um conteúdo personalizado para você por meio de uma verdadeira "curadoria" de informações. Esse fenômeno é conhecido como **bolha informacional**.

Bolha informacional/bolha de informação

Ambiente, especialmente online, em que as pessoas são expostas apenas a informações e opiniões que confirmam aquilo em que já acreditavam. A bolha informacional é um viés construído pelos algoritmos a partir de nossos hábitos e pesquisas na internet.

BOLHA informacional/bolha de informação. *In*: GLOSSÁRIO. [*S. l.*]: **Educamídia**. Disponível em: https://educamidia.org.br/glossario. Acesso em: 15 fev. 2024.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Esquema representando o fenômeno da bolha informacional.

As plataformas digitais utilizam algoritmos para recomendar conteúdos semelhantes aos que você costuma acessar ou interagir na internet. Um algoritmo é uma sequência de instruções claras e bem definidas. Essas plataformas são programadas para entender suas preferências através das curtidas, das buscas realizadas e do tempo que você dedica a determinado conteúdo. Com essas informações, elas sugerem conteúdos similares, mantendo sua atenção por mais tempo e, assim, gerando retorno financeiro para elas.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Algoritmos das redes sociais**

Pergunte aos estudantes se já tiveram a impressão de que, após comentar determinado assunto com um amigo nas redes sociais, ou ter feito alguma pesquisa sobre um tema ou produto, ao utilizar a internet as propagandas e os resultados de conteúdos ficaram mais direcionados a tal assunto ou produto. Deixe-os compartilhar as experiências e incentive-os a argumentar sobre o porquê de isso ocorrer. O tema abordado faz parte da cultura juvenil deles, aproveite a conversa e apresente o ***Podcast:* Algoritmos das redes sociais** e verifique se eles compreendem que, apesar de certas vantagens do uso de algoritmos, esses programas também podem acabar identificando outros tipos de dados. Nesse sentido, explique, por exemplo, a importância de ler os contratos de prestadoras de serviços digitais, como plataformas de vídeos e de redes sociais, a fim de entender como elas coletam nossos dados pessoais.

Sair da bolha não é assim tão simples

[...] "A internet dos algoritmos vem mudando o modo como a sociedade consome informação e a sua percepção do mundo. Isso tem um papel positivo e prático em tempos de abundância informativa na rede, mas seus efeitos também preocupam", explica.

"Ao criar algoritmos que selecionam, refinam e personalizam buscas de acordo com seu histórico de navegação, no caso do Google, ou que escolhem o conteúdo que deve ser mostrado ou não na sua *timeline*, a exemplo do Facebook, essas plataformas orientam e mediam o fluxo informativo na rede".

Os algoritmos melhoram a experiência do usuário, mas é preciso manter em mente que seu principal objetivo é econômico, como coloca Fernanda. "Vale a máxima 'Se você não está pagando por um produto, então o produto é você'. O algoritmo do Facebook prioriza o *feed* de notícias de familiares e amigos nas *timelines*. Marcas e veículos de comunicação precisam pagar mais para entregar conteúdo ao seu público-alvo. É um modelo de negócio, e não há problemas nisso. Mas é essencial que esse jogo de forças esteja muito claro para o usuário". [...]

MELO, A. Sair da bolha não é assim tão simples. **Jornal do Campus**, São Paulo, 13 set. 2017. Disponível em: https://www.jornaldocampus.usp.br/index.php/2017/09/sair-da-bolha-nao-e-assim-tao-simples/. Acesso em: 15 fev. 2024.

O livro **Como Sair das Bolhas**, de Pollyana Ferreira, trata de como as pessoas parecem, cada vez mais, se acomodarem em conviver, mesmo que virtualmente, apenas com quem pensa igual a elas. Essa tendência, segundo a autora do livro, facilita o compartilhamento de notícias falsas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Uma pesquisa realizada em 2024 pelo Instituto Locomotiva ouviu 1.032 pessoas; delas, 65% acreditam que as notícias falsas são distribuídas por meio de robôs e inteligência artificial e quase 90% disseram já ter acreditado em notícias falsas. Com base no texto e na sua pesquisa, como o conceito de bolha informacional pode estar associado a isso? **1.** Resposta pessoal.
2. Pesquise mais sobre bolhas informacionais e converse com os colegas a respeito de como os algoritmos que gerenciam as plataformas de comunicação digital podem influenciar a opinião das pessoas. **2.** Resposta pessoal.
3. Na opinião de vocês, o que é preciso fazer para sair de uma bolha informacional? Qual é a importância de conviver com pessoas que pensam de maneira diferente sobre um assunto? **3.** Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os exercícios complementares para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

1. Resolva em $\mathbb{C}$ cada uma das equações.

a. $x^2 - 2x + 26 = 0$ **1. a.** $S = \{1 + 5i, 1 - 5i\}$

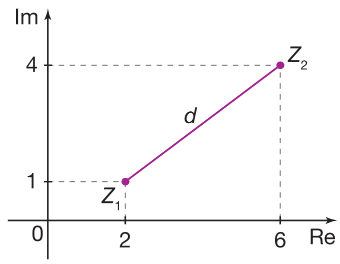
b. $x^2 + ix + 2 = 0$ **1. b.** $S = \{i, -2i\}$

c. $x^2 - 4x + 5 = 0$ **1. c.** $S = \{2 + i, 2 - i\}$

d. $x^3 - 8 = 0$ **1. d.** $S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$

[Sugestão para o item **d**: Fatore a diferença de cubos $x^3 - 2^3$, usando a identidade $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.]

2. No plano complexo a seguir estão representadas as imagens dos números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 6 + 4i$ e o segmento que indica a distância d entre eles.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A distância d entre os pontos (2, 1) e (6, 4) é dada por:

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Observe que essa distância é exatamente o módulo da diferença entre os complexos z_2 e z_1, isto é:

$$d = |z_2 - z_1| = |6 + 4i - (2 + i)| =$$
$$= |(6-2) + (4-1)i| = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2}$$

Essa observação pode ser generalizada, isto é: a distância d entre as imagens de dois números complexos quaisquer z_1 e z_2 é dada por $d = |z_2 - z_1|$ ou, de maneira equivalente, $d = |z_1 - z_2|$.

De acordo com essa ideia, calcule a distância entre as imagens dos complexos z_1 e z_2, em cada um dos casos:

a. $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 7 + 15i$ **2. a.** 13

b. $z_1 = 4 + i$ e $z_2 = 2 - i$ **2. b.** $2\sqrt{2}$

3. Mostre que o número complexo $\cos\frac{\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{24}$ é raiz da equação $z^{36} - z^{12} + 2i = 0$.

3. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.

3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.